1404-2 **Printed Pages : 20**

Degree (Part-II) (Vocational) Examination, 2020

(Subsidiary)

MATHEMATICS

[PPU-D-II(V) (Sub.)-MATH]

Time : Three Hours] **[Maximum Marks : 100**

119

Note : Answer five questions in all. Question No.1 is compulsory. Select two questions from Section A, one question from Section B and one question from Section C. All question carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रथम प्रश्न अनिवार्य है। खण्ड क से दो प्रश्न, खण्ड ख से एक प्रश्न और खण्ड ग से एक प्रश्न का उत्तर दीजिए। सभी प्रश्न बराबर अंक के हैं।

1. (i) If $y^2 = P(x)$, a polynomial of degree 3, then $2\frac{d}{dx}\left(y^3\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ equals to :

PPULearn.com

(a) $\frac{dP}{dx}+\frac{d^3P}{dx^3}$

(b) $\frac{d^2P}{dx^2}\cdot\frac{d^3P}{dx^3}$

(c) $P.\frac{d^3P}{dx^3}$

(d) a constant

यदि $y^2 = P(x)$, एक तीन घात का बहुपद, तब $2\frac{d}{dx}\left(y^3\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ के बराबर है :

(a) $\frac{dP}{dx}+\frac{d^3P}{dx^3}$

(b) $\frac{d^2P}{dx^2}\cdot\frac{d^3P}{dx^3}$

(c) $P.\frac{d^3P}{dx^3}$

(d) एक अचल

PPULearn.com

(ii) If $f(x, y, z) = 0$ then $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

(a) 1

(b) -1

(c) 0

(d) None of these

यदि $f(x, y, z) = 0$, तब $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

(a) 1

(b) -1

(c) 0

(d) इनमें से कोई नहीं

(iii) The absolute minimum value of a function f given by $f(x) = 12x^{4/3} - 6x^{1/3}$, $x \in [-1, 1]$, is :

(a) 18

(b) 0

PPULearn.com

(c) $\frac{1}{8}$

(d) $\frac{9}{4}$

$f(x) = 12x^{4/3} - 6x^{1/3}$, $x \in [-1,1]$ द्वारा प्रदत्त एक फलन का निरपेक्ष निम्नतम मान है :

(a) 18

(b) 0

(c) $\frac{1}{8}$

(d) $\frac{9}{4}$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} dx =$ _____.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{4}$

PPULearn.com

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/2} \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} dx =$ _____.

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

(v) The general solution of the equation

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ (c_1, c_2 being constant) :

(a) $y = c_1e^x + c_2e^{-4x}$

PPULearn.com

(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$

(c) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

(d) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ का व्यापक हल होगा

(यहाँ c_1, c_2 स्थिरांक हैं)

(a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}$

(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$

(c) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

(d) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

(vi) The singular solution of the Clairaut 's differential equation $y = px + \frac{a}{p}$, where $p = \frac{dy}{dx}$, is :

(a) $y^2 = \frac{x}{a}$ (b) $y^2 = ax$

(c) $y^2 = 4ax$ (d) $y^2 = 4x$

PPULearn.com

(b) $y^2 = ax$

(c) $y^2 = 4ax$

(d) $y^2 = 4x$

क्लैरट के अवकल समीकरण $y = px + \frac{a}{p}$ जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$ है, का सिंग्यूलर हल होगा :

(a) $y^2 = \frac{x}{a}$

(b) $y^2 = ax$

(c) $y^2 = 4ax$

(d) $y^2 = 4x$

(vii) The solution of differential equation $x(x - y)dy + y^2dx = 0$ is (c being constant) :

(a) $y = ce^{x/y}$

(b) $y = ce^{y/x}$

PPULearn.com

(c) $y = x + ce^{x/y}$

(d) $y = x^2 - ce^{y/x}$

अवकल समीकरण $x(x - y)dy + y^2dx = 0$ का हल है (यहाँ c स्थिरांक है) :

(a) $y = ce^{x/y}$

(b) $y = ce^{y/x}$

(c) $y = x + ce^{x/y}$

(d) $y = x^2 - ce^{y/x}$

(viii) Three vectors $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ satisfy the condition $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$. If $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4$ and $|\bar{c}| = 2$ then the value of $\bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{c}.\bar{a}$ is :

(a) 21

(b) $\frac{21}{2}$

PPULearn.com

(c) -21

(d) $-\frac{21}{2}$

तीन सदिश $\bar{a}$, $\bar{b}$ और $\bar{c}$ प्रतिबंध $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ को संतुष्ट करते हैं। यदि $|\bar{a}|=1, |\bar{b}|=4$ और $|\bar{c}|=2$ तब $\bar{a}.\bar{b}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a}$ का मान है :

(a) 21

(b) $\frac{21}{2}$

(c) -21

(d) $-\frac{21}{2}$

(ix) If $f = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2$ then the value of curl (grad f) is :

(a) 0

(b) 3

PPULearn.com

(c) $4x - 6y + 8z$

(d) $4x\hat{i} - 6y\hat{j} + 8z\hat{k}$

यदि $f = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2$ तब curl (grad f) का मान है :

(a) 0

(b) 3

(c) $4x - 6y + 8z$

(d) $4x\hat{i} - 6y\hat{j} + 8z\hat{k}$

(x) An athlete runs 400 meter circular track in 50 sec. with uniform angular velocity. His/her linear velocity in m/sec is :

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{8}$

(c) 10

(d) 8

एक धावक 400 मीटर वाले गोलीय ट्रैक को स्थिर कोणीय वेग से दौड़ता हुआ 50 से. में पूरा करता है। उसकी रेखीय गति मी./से. है :

PPULearn.com

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{8}$

(c) 10

(d) 8

Section-A

खण्ड-क

2. (a) If $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ prove that :

$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

यदि $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$$

(b) Find asymptotes of the curve $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$.

वक्र $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$ की अन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

PPULearn.com

3. (a) If $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2 + y^2}$ then find value of

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

यदि $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{x^2 + y^2}$ तब

$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) Find radius of curvature at any point (r, θ) for the curve $r^n = a^n \sin n\theta$.

वक्र $r^n = a^n \sin n\theta$ के लिए किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. (a) If $I_m = \int_0^\infty e^{-x} \sin^m x \, dx$ where $m \geq 2$ prove that $(1 + m^2) I_m = m(m-1) I_{m-2}$. Hence evaluate I_4.

PPULearn.com

यदि $I_m = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^m x \, dx$ जहाँ $m \geq 2$ है तो सिद्ध कीजिए कि $(1+m^2) I_m = m(m-1) I_{m-2}$ इसकी सहायता से I_4 निकालिए।

(b) If $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$ where $m \geq 2$, $n \geq 2$ prove that

$$(m+n) I_{m,n} = \cos^m x \sin nx + m I_{m-1,n-1}$$

यदि $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx \, dx$ जहाँ $m \geq 2$, $n \geq 2$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(m+n) I_{m,n} = \cos^m x \sin nx + m I_{m-1,n-1}$$

5. (a) Find the area of the region bounded by the curves $y^2 = 4 - x$ and $y^2 = x$.

वक्रों $y^2 = 4 - x$ और $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Find general solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x \cos x$$

PPULearn.com

अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x\cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

6. (a) Solve the differential equation

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

अवकल समीकरण $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$ को हल कीजिए।

(b) Solve the differential equation

$$\left(xy^3 + 2y^4 - 4x\right)\frac{dy}{dx} + \left(y^4 + 2y\right) = 0$$

अवकल समीकरण

$\left(xy^3 + 2y^4 - 4x\right)\frac{dy}{dx} + \left(y^4 + 2y\right) = 0$ को हल कीजिए।

Section-B

खण्ड-ख

7 (a) If $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ are any three vectors prove that :

$$\left[\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c} + \bar{a}\right] = 2\left[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right]$$

PPULearn.com

यदि $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ तीन सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$[\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}+\bar{c}, \bar{c}+\bar{a}] = 2[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$$

(b) Prove that $\text{grad}\, r^m = m r^{m-2} \bar{r}$, $\bar{r}$ being the position vector of a point in three dimensional space.

सिद्ध कीजिए कि $\text{grad}\, r^m = m r^{m-2} \bar{r}$, यदि $\bar{r}$ त्रिविमिय स्पेस में किसी बिन्दु का स्थिति सदिश है।

8 If $\bar{v}$ and $\bar{w}$ be two vector point functions, then prove the following :

यदि $\bar{v}$ और $\bar{w}$ दो सदिश बिन्दु फलन हो तब निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

(a) $\text{div}(\bar{v} \times \bar{w}) = \bar{w}.\text{curl}\, \bar{v} - \bar{v}.\text{curl}\, \bar{w}$

(b) $\text{grad}(\bar{v}.\bar{w}) = (\bar{w}.\nabla)\bar{v} + (\bar{v}.\nabla)\bar{w} + \bar{w} \times \text{curl}\, \bar{v} + \bar{v} \times \text{curl}\, \bar{w}$

Section-C

खण्ड-ग

9. (a) Find values of a and b such that the system of two forces (1, 2, -1) acting at (2, 3, 4) and (-1, a, 1) acting at (4, 5, b) has zero resultant force and zero resultant moment about x-axis

PPULearn.com

a और b के मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि दो बलों (2, 3, 4) पर कार्यरत (1, 2, -1) एवं (4, 5, b) पर कार्यरत (-1, a, 1) के समूह का परिणामी बल शून्य है एवं x-अक्ष के सापेक्ष परिणामी घूर्ण शून्य है।

(b) A cycloid $s = 4\sin\psi$ is placed in a vertical plane with its vertex on a horizontal surface. A particle starts from rest from cusp along the inner smooth surface. When it reaches the position $\psi = \frac{\pi}{4}$ then determine its linear velocity (assume g = 10 m/sec^2)

एक वक्रज $s = 4\sin\psi$ अपने शीर्ष के क्षैतिज तल पर होने के साथ उर्ध्व तल में स्थित है। उसके चिकने अन्दरूनी तल के साथ एक कण उभयाग्र से स्थिर अवस्था से चलना प्रारम्भ करता है। जब $\psi = \frac{\pi}{4}$ बिन्दु पर पहुंचता है, तब उसकी रेखीय गति निकालिए। (g = 10 m/sec^2 मानते हुए)

10. Two equal uniform rods AB and AC, each of weight w are freely jointed at A and rest with the extremities B and C on the inside of a smooth circular hoop, whose radius is greater then the length of either rod, the whole being in

PPULearn.com

vertical plane and the middle points of the rods being jointed by a light string . Show that if the string is stretched, its tension is w $(\tan\alpha - 2\tan\beta)$ where 2α is the angle between rods and β is the angle which either rod subtends at the centre.

दो एकसमान छड AB और AC प्रत्येक का वजन w को स्वतंत्र रूप से A पर जोड़ा जाता है एवं वे स्थिर रूप से अपनी अंतता B व C को एक चिकने गोलीय हूप पर रखकर स्थित है। हूप की त्रिज्या किसी भी छड की लम्बाई से बड़ी है। पूरी व्यवस्था उर्ध्व समतल में स्थित है व दोनों छड के मध्य बिन्दु एक हल्की डोरी से बंधे हैं। दर्शाइये कि यदि डोरी को खींचा जाय तो इसका तनाव w $(\tan\alpha - 2\tan\beta)$ है। जहाँ कि 2α छड़ों के मध्य का कोण है एवं β वह कोण है जो कि कोई भी छड़ वृत्त के मध्य बिन्दु पर बनाता है।

----- x -----

PPULearn.com